Mathematical Models for Sandpile Problems

Noureddine Igbida

Institue de Recherche XLIM-DMI, UMR-CNRS 6172
Université de Limoges, 87000 Limoges

Workshop MathEnv, Essaouira
23-24 Novembre 2012

Introduction

Tas de sable : terme générique pour désigner les matériaux granulaires

- Chaque fois qu'on entasse plusieurs objets, et que les interactions entre ces objets sont semblables à celles qui existent entre des blocs durs, on a affaire à un matériau granulaire.
- Un matériau granulaire est une collection de grain macroscopique solide de taille suffisamment large que le mouvement Brownien [1] est inexistant.

- **Questions.** Les exemples de problèmes que nous tentons de comprendre sont purement qualitatifs :
  - Comment se forme un tas de sable en fonction d'une source de distribution de sable ?
  - Modéliser les avalanches ?
  - Comment se stabilise un tas de sable instable ?
  - Comment se déplace un tas de sable sous l'effet d'un transport dû au vent ou à l'eau ?

- **Applications**
  - Environnement
  - Santé
  - Industrie

1. animées d'un mouvement irrégulier et incessant

Mathématiques du tas de sable

Même si on ne dispose pas de modèle mathématique universel "acceptable", différentes approches existent et sont exploitées pour étudier ce type de questions

- Modélisation numérique (éléments discrets, approche plus adoptée par des mécaniciens) :
  consiste à considérer le matériau granulaire comme un ensemble discret constitué d'un nombre fini de grains susceptibles d'interagir entre eux. Cette approche (microscopique) donne lieu à des modèles discrets faisant intervenir plusieurs équations décrivant le contact et le frottement entre les grains. Suivant les questions qu'on se pose, le nombre considérable de grains mis en jeu peut compliquer le calcul et l'analyse.

- Différentielle (EDO, EDP, Systéme d'EDP, Optimisation ....) : c'est une approche adoptée généralement par les physiciens et mathématiciens. Elle modélise les matériaux granulaires en les assimilant à des fluides.
  Néanmoins, ils ne coulent pas comme les liquides, ils glissent en avalanches irrégulières. En supposant que le glissement est confiné dans une couche mince, on peut décrire la dynamique à l'aide de lois fondamentales de la mécanique des fluides ou des équations phénoménologiques.

- Algèbre combinatoire (automate cellulaires)
  Le(s) tas de sable est un modèle formel pour des systémes de type SOC (Self-Organized Criticality). Il s'agit de systémes dynamiques discrets qui, à partir d'une quelconque situation initiale, évoluent vers un état "critique".

- Stochastique (automates cellulaires et systéme de particules)
  Approche stochastique de particule sur réseau

- .....

Généralités : effet de talus et angle de repos

- Le tas de sable qui se forme lorsque le sable est versé à partir d'un point fixe est conique.
- Dans les régions montagneuses, on observe souvent des talus formés par des fragments de roches accumulés au bord des routes.
- Dans les déserts, les grains transportés par le vent, s'empilent derrière les obstacles et forment des pentes.
- Sur les bordures des plages, on observe souvent des rides assez régulièrement espacées.

Cette aptitude des matériaux granulaires à se mettre en pente ou en talus est appelée effet de talus.

- L'effet de talus oppose les matériaux granulaires aux fluides : lorsque l'on incline un verre d'eau, la surface libre reste horizontale. Si on fait la même expérience avec du sable, le résultat est très différent : la surface libre du sable commence par tourner avec le verre. Ainsi, elle fait un angle avec l'horizontale.
- Si on continue à tourner le verre, l'angle augmente jusqu'à une certaine valeur où une avalanche de grains se déclenche à la surface et dévale la pente. Aprés l'avalanche, on obtient an angle légérement plus faible que celui qui correspond au déclenchement de l'avalanche :

cette observation indique qu'il existe un angle limite, appelé angle de repos, qui ne peut pas être franchi.

- Si $u = u(t, x)$ represente la surface du talus, l'effet de talus impose une contrainte sur ∇u.

Nos modèles sont basées sur l'angle de repos : problèmes d'évolution avec contrainte sur le gradient

- Le tas de sable qui se forme lorsque le sable est versé à partir d'un point fixe est conique.
- Dans les régions montagneuses, on observe souvent des talus formés par des fragments de roches accumulés au bord des routes.
- Dans les déserts, les grains transportés par le vent, s'empilent derrière les obstacles et forment des pentes.
- Sur les bordures des plages, on observe souvent des rides assez régulièrement espacées.

Cette aptitude des matériaux granulaires à se mettre en pente ou en talus est appelée effet de talus.

- L'effet de talus oppose les matériaux granulaires aux fluides : lorsque l'on incline un verre d'eau, la surface libre reste horizontale. Si on fait la même expérience avec du sable, le résultat est très différent : la surface libre du sable commence par tourner avec le verre. Ainsi, elle fait un angle avec l'horizontale.
- Si on continue à tourner le verre, l'angle augmente jusqu'à une certaine valeur où une avalanche de grains se déclenche à la surface et dévale la pente. Aprés l'avalanche, on obtient an angle légérement plus faible que celui qui correspond au déclenchement de l'avalanche :

cette observation indique qu'il existe un angle limite, appelé angle de repos, qui ne peut pas être franchi.

- Si $u = u(t, x)$ represente la surface du talus, l'effet de talus impose une contrainte sur ∇u.

Nos modèles sont basées sur l'angle de repos : problèmes d'évolution avec contrainte sur le gradient

Plan

- Modèle continue
  - Modélisation
  - Existence et unicité de solution
  - Analyse numérique
- Modèle Stochastique
  - Modélisation
  - Limite fluide
- Modèle nonlocal
  - Modélisation
  - Existence et unicité de solution
  - Analyse numérique
- Connexion, problémes ouverts et perspectives

Modèle continue d'évolution de surface

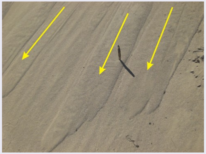
- *S. Dumont and N. Igbida, On the collapsing sandpile problem.*
  Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA), Vo 10 (2), 625-638, 2011.

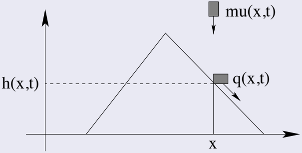
- *N. Igbida, A Generalized Collapsing Sandpile Model.*
  Archiv Der Mathematik, Volume 94, Number 2, 2009, 193-200

- *S. Dumont and N. Igbida, On a Dual Formulation for the Growing Sandpile Problem.*
  European Journal of Applied Mathematics, vol. 20, (2008) pp. 169 ?185

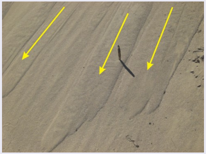
- *N. Igbida, "Evolution Monge-Kantorovich equation".*
  Submitted

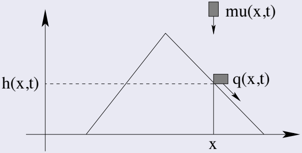
Modèle d'évolution de surface ([Prighozin, 1996], [Aronson and Al.,1999])





- The flow is confined in a thin boundary layer moving down the slopes
- The density of the material is constant
- Surface flow is directed by the steepest descent
- Angle of stability α : the steepest angle that the surface made with the ground
- No pouring over the parts of the pile surface inclined less than α





- Conservation of mass

$$h_t + \nabla \cdot q = \mu$$

- Phenomenological equations

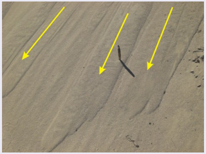
$$\exists\ m = m(t,x) \geqslant 0\ :\ q = -m\,\nabla h$$

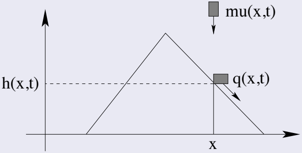
- Gradient constraint

$$|\nabla h| \leq \gamma := tan(\alpha)$$

- No pouring for surface inclined less than

$$m\,(|\nabla h| - \gamma) = 0$$





$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x) - \nabla \cdot (m\, \nabla h(t,x)) = \mu & \text{in } Q \\ m = m(t,x) \geqslant 0,\ |\nabla h(t,x)| \leq 1 & \text{in } Q \\ m\,(1 - |\nabla h(t,x)|) = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Consider the stationary problem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \Big(m(x)\nabla z(x)\Big) = g & \text{in } \Omega \\ m \geqslant 0,\ |\nabla z| \leq 1,\ m\,(1 - |\nabla z|) = 0 & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Theorem (Evans, De Pascale, Pratelli ...)

Let $g \in L^2(\Omega)$ be such that $\displaystyle\int_\Omega g = 0$ and set $K = \Big\{z \in H_0^1(\Omega)\ ;\ |\nabla z| \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\Big\}$. The following assertions are equivalent

- *$z \in K$, there exists $m \in L^2(\Omega)$, such that $m \geqslant 0$, $m\,(|\nabla z| - 1) = 0)$ a.e. in Ω and $-\nabla \cdot (m\nabla z) = g$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*
- *$g \in \partial \mathbf{I}_K z$; i.e.*

$$\int_\Omega zg \geqslant \int_\Omega \xi g \quad \text{for any } \xi \in K.$$

The preceding theorem implies that

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x) - \nabla\cdot(m(t,x)\nabla h(t,x)) = f \\ m \geqslant 0,\ |\nabla h| \leq 1,\ m\,(1-|\nabla h|) = 0 \\ u = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial \mathbf{I}_K u(t) \ni f(t) \\ \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad \text{in } H = L^2(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(t) \in K, \quad \text{for any } t > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \xi(f(t) - u_t(t)) \leq \int_\Omega u(t)(f(t) - u_t(t)) \\ \text{for any } t > 0 \text{ and } \xi \in K. \end{cases}$$

Existence de solution

Theorem (nonlinear semigroup theory in Hilbert space)

For any $f \in BV(0,T;L^2(\Omega))$, *(PM) has a unique solution in the sense that :*

$$\begin{cases} u \in W^{1,\infty}([0,T);L^2(\Omega)), \; u(0)=0, \\ u(t) \in K \quad \text{and} \; \displaystyle\int_\Omega (u(t)-z)\,(f(t)-u_t(t)) \geqslant 0 \\ \text{for any } z \in K \text{ and a.e. } t \in [0,T). \end{cases}$$

Moreover, we have

Theorem

For any $f \in BV(0,T;L^2(\Omega))$, *denoting* u_p *the solution of the p-Laplacian evolution equation (large* p*)*

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \mu \quad \text{in } Q \\ u = 0 \quad \text{on } \Sigma \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

as $p \to \infty$,

$$u_p \to u \quad \text{in} \quad \mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega)),$$

and u *is the solution of (PM).*

Stationary equation :

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\Big(m(x)\nabla z(x)\Big) = g & \text{in } \Omega \\ m \geqslant 0,\ |\nabla z| \le 1,\ m\,(1-|\nabla z|) = 0 & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- For general g, m is not regular : m is a measure and $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$
- Theory of tangential gradient with respect to Radon measure (cf. Bouchitté, Buttazzo, De Pascale, Seppecher ...) :

$$(MK) \qquad \begin{cases} -\nabla\cdot(m\,\nabla_m z) = g & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ |\nabla_m z| = 1 \quad m- & \text{a.e. in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \qquad \text{(Monge-Kantorovich equation)}$$

- **Bibliography :** Existence, uniqueness of $m\,\nabla_m u$, regularity, related transport for Monge problem... : Ambrosio, Bouchitté, Buttazzo, De Pascale, Evans, Seppecher ....

Evolution equation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(m\,\nabla_m u) = \mu, \quad |\nabla u| \le 1 & \text{in } Q \\ |\nabla_m u(t)| = 1 & m- \ \text{a.e. in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

- Theory of tangential derivative for time dependent functions : $t \in (0,T) \to \nabla_\nu u(t)$??

Calcul numérique

- *S. Dumont and N. Igbida, "On a Dual Formulation for the Growing Sandpile Problem"* European Journal of Applied Mathematics, vol. 20, (2008) pp. 169-185

Assume that $\mu = f \quad \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

$$(PM) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial \boldsymbol{I}_K u(t) \ni f(t) & \text{for } t \in (0, T) \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Time discretization : Euler implicit schema

- $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n = T \qquad$ whith $t_i - t_{i-1} = \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., n$
- $f_1, ..., f_n \in L^2(\Omega))$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

- We consider the approximation of $u(t)$ by :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_0 & \text{if } t \in]0, t_1] \\ u_i & \text{if } t \in]t_{i-1}, t_i] \end{cases} \qquad i = 1, ..., n$$

where u_i is given by :

$$\begin{cases} u_i + \varepsilon\, \partial \boldsymbol{I}_k u_i \ni \varepsilon f_i + u_{i-1} & \text{for } i = 1, 2, ...n \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

- u_ε is the $\varepsilon-$approximate solution of (P_μ)

$$(PM) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial \mathbb{I}_K u(t) \ni f(t) & \text{for } t \in (0,T) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Nonlinear semigroup theory

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

Theorem

Assume $f \in BV(0,T; L^2(\Omega))$. Then,

1. *For any $\varepsilon > 0$ and any $\varepsilon-$discretisation, there exists a unique $\varepsilon-$approximation u_ε of (P_μ).*
2. *There exists a unique $u \in W^{1,\infty}([0,T); L^2(\Omega))$ such that $u(0) = 0$, and*
$$\|u - u_\varepsilon\|_{C([0,T);L^2(\Omega))} \leq C(\varepsilon) \quad \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$
3. *The function u is the unique solution of (P_μ).*

The generic problem is

$$v + \partial \boldsymbol{I}_K v \ni g \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \boldsymbol{P}_K g$$

where

- $K = \left\{ z \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ ; \ |\nabla z| \leq 1 \right\}$.
- $\boldsymbol{P}_K$ the projection onto the convex K, with respect to the $L^2(\Omega)$ norm :

$$v = \mathbf{P}_K(g) \Leftrightarrow v \in K, \ \int_\Omega (v-g)(v-z) \geqslant 0 \quad \text{for any } z \in K.$$

Question :

For a given $g \in L^2$, how to compute $v = \boldsymbol{P}_K g$?

Optimization problem :

$$J(v) = \frac{1}{2} \min_{z \in K} \|z - g\|^2_{L^2(\Omega)} = \min_{z \in L^2(\Omega)} J(z),$$

with $J(z) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |z-g|^2 + \int_\Omega \mathbb{I}_K(z)$.

Standard duality argument (Ekeland-Temam) : if

$$\mathcal{P} := \min \left\{ F(z) + H(\Lambda z) \ ; \ z \in V \right\},$$

where

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda & : & V & \longrightarrow & Y \\ & & z & \longrightarrow & \Lambda z := \nabla z \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} F & : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & z & \longrightarrow & F(z) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |z-g|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} H & : & Y & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & & \sigma & \longrightarrow & H(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega \\ +\infty & \text{sinon ,} \end{cases} \end{array}$$

then

$$\mathcal{D} := \max_{p \in Y'} - \Big(F^*(\Lambda^* p) + H^*(-p) \Big) \leq \mathcal{P}.$$

Theorem

Assume that $\mathcal{P} < \infty$. If, there exists $z_0 \in V$ such that $F(z_0) < \infty$, $H(\Lambda z_0) < \infty$ and H is continuous at Λz_0, then

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}.$$

and

$$\Lambda^* p \in \partial F(u) \quad \text{et} \quad -p \in \partial H(\Lambda u).$$

We have

- $\Lambda^*\sigma := \nabla \cdot \sigma$
- $F^*(z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |z-g|^2 + \dfrac{1}{2}\int_\Omega g^2$
- $H^*(\sigma) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|$

$$G(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\,\mathrm{div}(w))^2 + \int_\Omega g\ \ \mathrm{div}(w) + \int_\Omega |w|$$

and

$$\mathcal{D} = \max\Big\{ -G(\sigma)\ ;\ \sigma \in Y^* \Big\}.$$

We expect that

$$-G(\Phi) = \max\Big\{ -G(\sigma)\ ;\ \sigma \in Y^* \Big\} = \min\Big\{ F(z) + H(\Lambda z)\ ;\ z \in V \Big\} = F(u)$$

and

$$-\nabla \cdot \Phi = g - u \quad \text{and} \quad \Phi \in \partial \boldsymbol{I}_{B(0,1)}(\nabla u).$$

- The natural space for the study of $\mathcal{P}$ by duality argument is the set of vector valued Radon measures such that the divergence is L^2 (this kind of argument was used in ([BaPr,08]).
- We give a simple analysis by using the space $H_{div}(\Omega)$;

$$H_{div}(\Omega) = \Big\{ w \in \Big(L^2(\Omega)\Big)^N\ ;\ \ \mathrm{div}(w) \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

Approximation numérique : formulation duale dans $H_{div}(\Omega)$

- $J(z) = \frac{1}{2}\int_\Omega |z-g|^2 + \int_\Omega \mathbb{I}_K(z)$
- $H_{div}(\Omega) = \{\sigma \in (L^2(\Omega))^N \; ; \; \mathrm{div}(\sigma) \in L^2(\Omega)\}$
- $G(\sigma) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{div}(\sigma))^2 + \int_\Omega g\mathrm{div}(\sigma) + d \int_\Omega |\sigma|$

Theorem (Dumont-Ig,2007)

Let $g \in L^2(\Omega)$ and $v = \boldsymbol{P}_k(g)$. Then, there exists a sequence $(w_\epsilon)_{\epsilon>0}$ in $H_{div}(\Omega)$, such that, as $\epsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} \min_{z\in L^2(\Omega)} J(z) &= \lim_{\epsilon\to\infty} \Big(- G(w_\epsilon)\Big) \\ &= \sup_{w\in H_{div}(\Omega)} \Big(- G(w)\Big) \end{aligned}$$

and

$$div(w_\epsilon) \to v - g \qquad in\ L^2(\Omega).$$

Approximation numérique : approximation de $\inf_{\sigma \in H_{div}(\Omega)} G(\sigma)$

- Ω is a bounded, open, polyhedral subset of $\mathbb{R}^N$ (N equal to 1 or 2).
- T_h a regular partitioning (triangulation or quadrangulation) of $\overline{\Omega}$ by n disjoint open simplices τ of diameter no greater than a given real h, with $\overline{\Omega} = \cup_{\tau \in T_h} \overline{T}$.
- $V_h \subset V := H_{div}(\Omega)$ the space of lowest-order Raviart-Thomas finite elements :

$$V_h = \Big\{ \quad q_h \in (L^2(\Omega))^D : \ q^h_{|\tau} = a_\tau + b_\tau x, \ a \in \mathbb{R}^2, \ b \in \mathbb{R}, \ \forall \tau \in T_h, \\ \text{and } q_h \cdot \nu \text{ is continuous across simplex boundaries} \Big\}.$$

V_h is a finite dimensional subspace of V with a dimension equal to $N = N(h)$.

Let w_h be the solution of

$$(\mathcal{D}_h) \qquad G(w_h) = \inf \Big\{ G(q_h); \ q_h \in V_h \Big\}.$$

Theorem

Let $g \in L^2(\Omega)$, $v = \boldsymbol{P}_k g$ and w_h a solution of $(\mathcal{D}_h)$. Then, as $h \to 0$,

$$div(w_h) \to v - g \quad \text{ in } L^2(\Omega)$$

and

$$-G(w_h) \to \min_{z \in L^2(\Omega)} J(z) = \frac{1}{2} \|v - g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Simulations : problème de la table

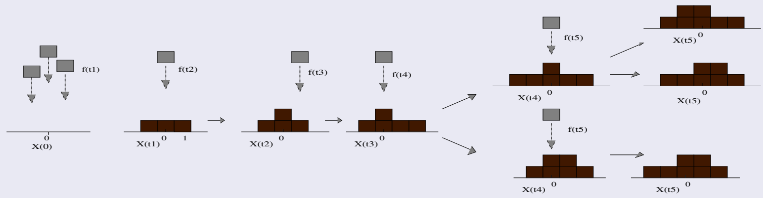
Simulations : source périodique

Variante : avalanche d'un tas de sable instable

Modèle stochastique

Modèle stochastique : systéme de particules [EvReza-98]

The evolution of a stack of unit cubes resting on the plane when new cubes are being added to the pile :



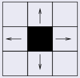
- The cube is assigned on a position connected to several downhill "staircases" along which it can move, and the cube will randomly select among the available downhill paths
- The assigned cube has no "staircases" derived from the position it was put on and remains in place
- A cube moves following adjacent positions in order to get a stable configuration, which means that the heights of any two adjacent columns of cubes can differ by at most one
- In the case of two dimension, a cube moves by falling in one of the four directions (forward, back, left or right)

Consider a set of sites labeled by a couple of integers $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$

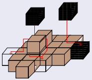
- The source term is a deterministic function $\hat{f} \; : \; (0, T) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ assigning cubes
- At each time a stable configuration is reached instantaneously ; that is a mapping $\eta(t) \; : \; \mathbb{Z}^2 \to \boldsymbol{N}$ such that

$$|\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \quad \text{if} \quad i \sim j,$$

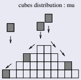
where $i \sim j$ denotes $|i - j| \leq 1$ and $|i| = |i_1| + |i_2|$, for any $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$.



$i \sim j \Longleftrightarrow |i - j| \leq 1$



3D



2D

Remark : If we enable the cubes to move in the eight directions by adding the displacements on the diagonal, then we need to equip $\mathbb{Z}^2$ with the norm

$$|(i_1, i_2)| = \max(|i_1|, |i_2|)$$

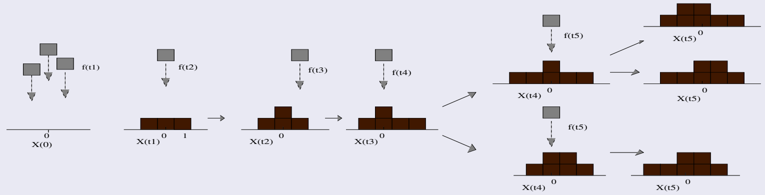
- Dynamique aléatoire d'un ensemble de particules (cubes)
- (O, P) espace de probabilité
- Etats admissible : S
- $S \subset H$ espace Euclidien
- Discretiser le temps $t_0 < t_1 < ....$ (aléatoire).
- Décrire le systéme avec une suite de variables aléatoires $X_i \in S$ indépendante définie sur O
- Considérer $\Big(N(t)\Big)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson process (d'intensité λ), puis définir le processus $\Big(X(t)\Big)_{t \geqslant 0}$ par $X(t) = X_{N(t)} \quad$ for $t \geqslant 0$ (processus de Poisson composé)
- Si $X_1, X_2, ...$ est une chaine de Markov ; i.e.

$$P\Big[X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n\Big] = P\Big[X_{n+1} = x \mid X_n = x_n\Big].$$

  alors $\Big(X(t)\Big)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Markov.

- Limite hydrodynamique (les cubes sont de plus en plus petits et de plus en plus nombreux)

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \eta([Ns], [Nx])].$$



Principes :

- Source f est deterministe.
- Temps d'arrivé des cubes aléatoire.
- L'arrivage se fait cube par cube et le mouvement des cubes est aléatoire.
- Une colonne de cube est instable si l'écart avec une des colonnes voisines dépasse 1.
- Un cube est instable s'il se trouve au sommet d'une colonne instable.
- Si un cube (ou plusieurs) qu'on dépose se trouve dans une position instable, alors il existe au moins un chemin (un escalier) le long duquel le cube peut descendre jusqu'à trouver une position stable.
- On ne compte pas le temps où le cube est en mouvement. On suppose qu'il atteint sa position stable instantanément.

- $S = \Big\{\xi \ : \ \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N} \ ; \ |\xi(i) - \xi(j)| \leq 1 \text{ pour tout } i \sim j\Big\}$

- $H = l^2(\mathbb{Z}^2)$

- Pour tout $\xi \in S$, on note par $p(i,j,\xi)$ la probabilité qu'a un cube qu'on dépose sur la colonne i pour finir sa chute sur la colonne j

Comme pour tout $t > 0$, un cube déposé sur la colonne i se stabilisera surement quelque part sur une colonne j, alors pour tout $\xi \in S$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} p(i,j,\xi) = 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

Définition du générateur infinitésimal A du processus de Markov

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

Equation stochastique qui caractérise le processus

- Assume that $\hat{f}(t,i) = f\left(\frac{t}{N}, \frac{i}{N}\right)$, with $f \in BV(0,T; L^2(\mathbb{R}^2))$
- Let $(\eta(t), t \geqslant 0)$ the Markov processus associated with the source $\hat{f}$ (i.e. η satisfying the stochastic equation)

Theorem ([Ev-Reza,98][Ig,08])

As $N \to \infty$, we have

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left| u(t,x) - \frac{1}{N}\,\eta\left(Nt, [N\,x]\right) \right|^2\right] \to 0,$$

where u is the solution of the evolution equation

$$(PM) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial \boldsymbol{I}_K u(t) \ni f(t) \\ \\ u(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left(f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t}\right)\left(u(t) - z\right) \geqslant 0 \\ \\ \text{for any } z \in K. \end{cases}$$

and

$$K = \left\{ z \in H_0^1(\Omega) \ ; \ |\nabla z| \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

Modèle non local

- *N. Igbida, "A Partial Integrodifferential Equation in Granular Matter and Its Connection with Stochastic Model".* SIAM J. Math. Anal. 44, pp. 1950-1975, 2012
- *N. Igbida, F. Karami and N. Ta Thi, "Discrete model for a Collapsing sandpile problem"* In preparation.

Modélisation

- Some discrete structure can be considered to be independent from processes related to continuity (such as differentiation or integration)
- The state in some position is changing according to the states of its neighbors including the position itself

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

nonlocal considerations for modeling the dynamic

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y, u(x), u(y))\, dy = f(x) \qquad \text{for any } x \in \mathbb{R}^2$$

- $\mathcal{F}(t, x, y, u(x), u(y))$ records both the blocks leaving $u(x)$ for to go to $u(y)$ and also the blocks arriving at $u(x)$ from $u(y)$.

- Granular matter with arbitrary components (grain, blocks, ...)
- $u(t,x)$ is the density of materials at the position x and $f(t,x)$ is a source of distribution of the material
  - $u(t+\Delta t, x) \simeq u(t,x) + \Delta t\, Q(t,x)$
  - $Q(t,x)$ is the rate of materials arriving at the position x
  - $Q(t,x) = f(t,x) + In(t,x) - Out(t,x)$ where $In(t,x)$ records the blocks arriving to the position x from neighboring positions and $Out(t,x)$ records the blocks leaving the position x towards neighboring positions.
  - $j(t,x,y)$ the amount of cubes that moves from the position x to the position y, we have

$$In(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} j(t,y,x)\, dy \quad \text{and} \quad Out(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} j(t,x,y)\, dy.$$

  - $\mathcal{F}(t,x,y) = j(t,x,y) - j(t,y,x)$, we have $\mathcal{F}(t,x,y) = -\mathcal{F}(t,y,x)$ and

$$u(t+\Delta t, x) \simeq u(t,x) + \Delta t\, f(t,x) - \Delta t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t,x,y)\, dy.$$

- Letting $\Delta t \to 0$, we obtain the following integral equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t,x,y)\, dy = f(t,x) \quad \text{for any } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

where $\mathcal{F}(t,x,y)$ is an anti-symmetric function, defined on $(0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, covering the exchanges between the position x and the nearby position y.

To close the problem, we need to give the connection between $\mathcal{F}$ and u.

- **Stabiliy condition :** a non local constraint of stability

$$|u(x) - u(y)| \leq \delta \quad \text{for} \quad |x - y| \leq \varepsilon,$$

where $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ are given constants depending on the gravity, the contact between the blocks and their geometry.

- The blocks of the structure move only when the limiting condition is turning to be exceeded, the dynamics in turn is concentrated on the set

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ |u(t, x) - u(t, y)| = \delta \text{ and } |x - y| \leq \varepsilon\Big\} \supset Support(\mathcal{F}(t))$$

- The blocks moves by falling from high positions to lower positions :

$$\mathcal{F}(t, x, y) = |\mathcal{F}(t, x, y)| \frac{u(x) - u(y)}{\delta}.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (u(t, x) - u(t, y))\, \mu(t, x, y)\, dy = f(t, x) \\ |u(t, x) - u(t, y)| \leq \delta \quad \text{for any} \quad |x - y| \leq \varepsilon \\ \mu(t) \geqslant 0, \ \mu(t) \text{ is symmetric} \\ Support(\mu(t)) \subseteq \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ |u(t, x) - u(t, y)| = \delta \text{ and } |x - y| \leq \varepsilon\Big\}. \end{cases}$$

where

$$\mu(t, x, y) = \frac{1}{\delta} |\, \mathcal{F}(t, x, y)|.$$

PIDE

Set

$$K_\varepsilon^\delta = \Big\{ z \in L^2(\mathbb{R}^2) \ ; \ |z(x) - z(y)| \leq \delta \text{ for } |x-y| \leq \varepsilon \Big\}$$

and, for any $z \in K_\varepsilon^\delta$, we denote by

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\delta(z) = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ ; \ |z(x) - z(y)| = \delta \text{ and } |x-y| \leq \varepsilon \Big\}.$$

$$(P_\varepsilon^\delta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Big(u(x) - u(y) \Big) \, \mu(x, dy) = f(t,x) & \text{for } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^2 \\ u(t) \in K_\epsilon^\delta, \ \ \mu(t) \geqslant 0, \ \ \mu(t) \llcorner \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t)) & \\ u(0) = u_0 & \end{cases}$$

In (P_ε^δ) :

- $\lambda \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u(t,y) \, \mu(x, dy)$ records blocks arriving to the position $u(t,x)$ from all other places.
- $\lambda \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \mu(t,x,y) u(t,x) \, \mu(x, dy)$ records blocks leaving location $u(t,x)$ to travel to all other sites.

Problème générique

$$(PS_\varepsilon^\delta) \qquad \begin{cases} u(x) + \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\, \mu(x, dy) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u \in K_\epsilon^\delta,\ \mu \geqslant 0,\ \mu \llcorner \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u). \end{cases}$$

Let

$$\mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+ = \Big\{ \mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+ \ ; \iint \xi(x, y)\, \mu(dx, dy) = \iint \xi(y, x)\, \mu(dx, dy)$$

$$\text{for any } \xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \Big\}.$$

Theorem

For any $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, (PS_ε^δ) *has a unique solution* u *in the following sense :*

$$\begin{cases} u \in K_\epsilon^\delta \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2),\ \mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+,\ \mu \llcorner \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u) \\ \int_{\mathbb{R}^2} u(x)\xi(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\, \xi(x)\, d\mu(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \xi(x)\, dx \end{cases}$$

for any $\xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$. *Moreover,* u *is a solution of* (PS_ε^δ) *if and only if*

$$u = P_{K_\epsilon^\delta}(f), \tag{2}$$

where $P_{K_\epsilon^\delta}$ *is the projection with respect to the* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *norm on the convex* K_ϵ^δ.

$$\begin{cases} u(x) + \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\, \mu(x, dy) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u \in K_\epsilon^\delta,\ \mu \geqslant 0,\ \mu \perp \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u) \end{cases} \iff f \in \partial \boldsymbol{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u)$$

Corollary

Let $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ *and* $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2) \cap K_\varepsilon^\delta$. *Then,*

$$f \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\ \mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+,\ \mu \perp \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u) \\ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\, \xi(x)\, \mu(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \xi(x)\, dx \\ \forall \xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Remark

- The operator $\partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$ was introduced by [Andreu-Mazon-Rossi-Toledo,2008] as the nonlocal $\infty-$Laplacian. Then, since the local $\infty-$Laplacian correspond to the nonlinear PDE for the Sandpile, they suggest $\partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$ as an operator for nonlocal model of Sandpile.
- Here, we re-write $\partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$ in terms of "Partial Intro-Differential Equation" (PIDE).

Theorem

For any $f \in BV(0,T;L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^1(0,T;\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2))$ *and* $u_0 \in K_\varepsilon^\delta \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$, (P_ε^δ) *has a unique solution* u *in the sense that :* $u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2))$, $u(0) = u_0$, *for any* $t \in (0,T)$, $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$ *and there exists* $\mu(t) \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+$ *such that*

$$\mu(t) \llcorner \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t))$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \xi(x)\,(u(t,x) - u(t,y))\,\mu(t,dx,dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(f(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \right) \xi(x)\,dx,$$

for a.e. $t \in (0,T)$ *and for any* $\xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$. *Moreover,*

1. *u is the unique solution of the evolution problem*

$$\begin{cases} u_t + \partial \mathbf{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u) \ni f & \text{in } (0,T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

   in the sense that $u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))$, $u(0) = u_0$ *and, for any* $t \in (0,T)$, $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$ *and*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) \left(u(t) - z \right) \geqslant 0, \qquad \text{for any } z \in K_\varepsilon^\delta.$$

2. *If, for* $i = 1,\ 2$, u_i *is the solution (given by 2.) corresponding to* f_i, *then, for any* $1 \leq q \leq \infty$,

Connexion avec le modèle stochastique

A typical situation corresponds to the case where $f(t)$ is constant on each set $I_i := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ [Nx] = i\right\}$, with $i \in \mathbb{Z}^2$; i.e.

$$f(t,x) = f\left(t, \frac{[Nx]}{N}\right), \quad \text{for any } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

In such situation, we imagine that the source is assigning, on the sites I_i, blocks whose base is a square of side length $\varepsilon = 1/N$ and height length δ.
Let $\hat{f} \ : \ (0,T) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$\hat{f}(t,i) = \delta^{-1} f(t, \frac{i}{N}) \quad \text{for any } (t,i) \in [0,\infty) \times \mathbb{Z}^2, \tag{5}$$

and let $\left(\eta(.,t), t \geqslant 0\right)$ be the Markov process generated by $\hat{f}$.

Theorem

For any $t \in (0,T)$, we have

$$\boldsymbol{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x) - \delta\, \eta(t,[N\,x])|^2\right] \leq \delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |f(s,x)|\, dxdt. \tag{6}$$

Remark

Le theorem implies that the solution of the PIDE is an approximation of the random height $\eta(t)$, for any $t \in (0,T)$.

Assume that $f \in BV(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))$ with bounded support, $f \geqslant 0$, and there exists $N \in \mathbb{N}^*$,

$$f(t,x) = f\left(t, \frac{[Nx]}{N}\right), \qquad \text{for any } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

We set

$$\hat{f}(t,i) = \delta^{-1}\, f(t, \frac{i}{N}) \quad \text{for any } (t,i) \in [0,\infty) \times \mathbb{Z}^2 \tag{7}$$

We consider $\hat{u}$ the solution of the following nonlinear dynamics in H :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial \boldsymbol{I}_{\hat{K}}(\hat{u}) \ni \hat{f} \quad \text{for } t \geqslant 0 \\ \hat{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

where $H = l^2(\mathbb{Z}^2)$, $\partial \boldsymbol{I}_{\hat{K}}$ denotes the sub-differential of $\boldsymbol{I}_{\hat{K}}$ in H and

$$\hat{K} := \Big\{ \eta \in H\ ;\ |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ if } i \sim j \Big\}.$$

That is

$$\begin{cases} \hat{u} \in W^{1,\infty}(0,T;H), \hat{u}(.,t) \in \hat{K} \text{ for a.e. } t \in [0,T), \\ \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \Big(\hat{f}(t,i) - \partial_t \hat{u}(t,i)\Big)\ \Big(\hat{u}(t,i) - \hat{\xi}(i)\Big) \geqslant 0,\ \forall\ \hat{\xi} \in \hat{K} \text{ and a.e. } t \in [0,T). \end{cases}$$

This is a discrete analogue of our equation (P_ε^δ).

Under the previous assumptions, we have

Lemma

u is a solution of (P^δ_ε), with $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$, if and only if

$$u(t,x) = \delta\, \hat{u}(t,[N\,x]) \qquad \textit{for any } (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow\Downarrow \qquad \Downarrow\Downarrow \qquad \Downarrow\Downarrow \qquad \Downarrow$$

It is enough to study numerical analysis of the discrete problem

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial \boldsymbol{I}_{\hat{K}}(\hat{u}) \ni \hat{f} & \text{for } t \geqslant 0 \\ \hat{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

where $H = \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, $\partial \boldsymbol{I}_{\hat{K}}$ denotes the sub-differential of $\boldsymbol{I}_{\hat{K}}$ in H and

$$\hat{K} := \Big\{ \eta \in H \ ; \ |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ if } i \sim j \Big\}.$$

$$v + \partial \boldsymbol{I}_{\hat{K}} v \ni g \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \boldsymbol{P}_{\hat{K}} g$$

where

- $\hat{K} := \Big\{ \eta \in H \ ; \ |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ if } i \sim j \Big\}.$
- $\boldsymbol{P}_{\hat{K}}$ the projection onto the convex K, with respect to the $l^2(\mathbb{Z}^2)$ norm :

$$v = \mathbf{P}_{\hat{K}}(g) \Leftrightarrow v \in \hat{K}, \ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (v(i) - g(i))(v(i) - z(i)) \geqslant 0 \quad \text{for any } z \in \hat{K}.$$

Question :

For a given $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, how to compute $v = \boldsymbol{P}_{\hat{K}} g$?

Optimization problem :

$$J(v) = \frac{1}{2} \min_{z \in \hat{K}} \|z - g\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)} = \min_{z \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)} J(z),$$

with $J(z) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |z(i) - g(i)|^2 + \int_\Omega \mathbb{I}_{\hat{K}}(z).$

We introduce the set of anti-symmetric bounded sequence defined on $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ by :

$$\ell^1_{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) = \left\{ \hat{\mu} \in \ell^1(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) \; ; \hat{\mu}(i,j) = -\hat{\mu}(j,i), \text{ for any } (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \right\} \Big)$$

and the set of sequence of $\ell^1_{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$ concentrated on the set $\Big\{ (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \; ; \; |i-j| \leq 1 \Big\}$,

$$\mathcal{S}_{as} = \left\{ \hat{\mu} \in \ell^1_{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) \; ; \hat{\mu}(i,j) = 0 \text{ for } |i-j| > 1 \right\}.$$

We consider the functional $G : \ell^1(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$G(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbb{Z}^2} \Big(\sum_{\mathbb{Z}^2} \sigma(i,j) - \sigma(j,i) \Big)^2 - \sum_{\mathbb{Z}^2} \Big(\sum_{\mathbb{Z}^2} \sigma(i,j) - \sigma(j,i) \Big) \, g(i)$$

$$- \sum_{\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2} |\sigma(i,j)|.$$

Theorem (Ig&Karami&TaThi,2012)

Let $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ and $v := \mathbf{P}_{\hat{K}}(g)$. Then, for any $i \in \mathbb{Z}^2$,

$$v(i) = g(i) + \sum_{i \sim j} \Big(w(i,j) - w(j,i) \Big),$$

where $w \in \mathcal{S}_{as}$ is such that

$$G(w) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_{as}} G(\sigma) = -\min_{z \in \hat{K}} J(z) = J(v).$$

Numerical simulation

Perspectives

- Moving sand dunes : Barchanes ...
- Sandpile problem on non flat regions : lacs and rivers
- Collapsing sandpile problem.
- Hysteresis : angle of stability is different than the angle of avalanches.
- Application to optimal mass transportation : how to use numerical results concerning sandpile to treat Monge problem ?

Merci pour votre attention