

Equation de Korteweg-de Vries : de la modélisation au calcul scientifique

Mostafa ABOUNOUH
abounouh@fstg-marrakech.ac.ma

Université Cadi Ayyad
F.S.T. Marrakech-Maroc

Essaouira, 23 et 24 Novembre 2012

Plan

- 1 Motivation et découverte
- 2 Modélisation
- 3 Interprétation de l'équation et analyse numérique

Motivation

L'équation de Korteweg-de Vries modélise la propagation d'ondes longues de faibles amplitudes à la surface d'un canal peu profond.



Les ondes à la surface de l'eau sont très intéressantes pour le physicien. Elles correspondent à de nombreux phénomènes :

vagues en mer



ondes de sillage des bateaux



raz-de-marées



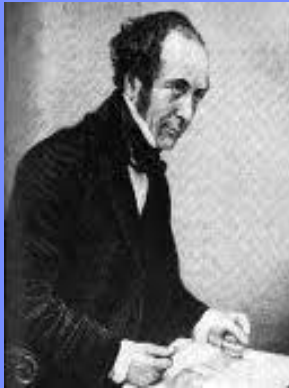
Elles comportent des classes d'ondes très variées selon les conditions aux limites :

ondes linéaires non dispersives \longrightarrow ondes non-linéaires dispersives.

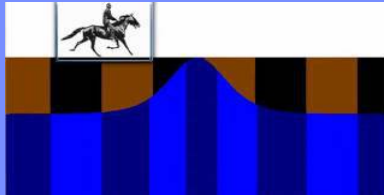


Découverte

Onde solitaire observée par John Scott Russel en 1834.

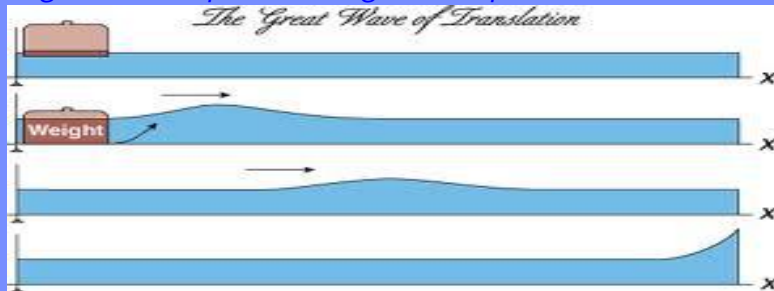


J'observais le mouvement d'un bateau qui était tiré rapidement le long d'un canal étroit par une paire de chevaux



quand, soudain, le bateau s'arrêta ... une masse d'eau qu'il avait mise en mouvement s'accumula autour de la proue du bateau puis l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse.

Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, préservant sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur."



extrait de **J. Scott Russel**, *Report on waves*. In John Murray, editor, *Report on the Fourteenth Meeting*, pages 311-390 + 57 plates, London, 1844, British Association for the advancement of science

Equations de base et conditions aux limites

60 ans après la découverte, le phénomène est mis en équation par Korteweg et de Vries en 1895.

- G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear waves*, John Wiley and Sons, New York (1974).
- A. Miranville, R. Temam, *Mathematical Modelling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, (1999).
- M. Peyrard, T. Dauxois, *Physique des solitons*, EDP Sciences/CNRS Editions



Fluide parfait décrit par le système d'Euler :

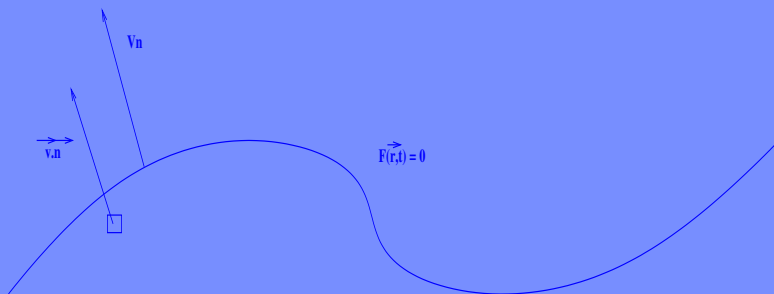
Systeme d'Euler

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla P \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

ρ : masse volumique du fluide, \vec{v} : champ de vitesse.
 \vec{g} : accélération de la pesanteur, P : pression dans le fluide.

Pour obtenir l'équation de propagation des ondes de surface, on ajoute au système d'Euler les relations imposées par les conditions aux limites.

Condition à la limite cinématique



- $F(\vec{r}, t) = 0$: équation de la surface du fluide
- $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F(\vec{r}, t)}{|\vec{\nabla} F(\vec{r}, t)|}$: normale à la surface

La composante normale de la vitesse d'un point de la surface est :

$$V_n(\vec{r}_0, t) = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

$$(H.1) \quad V_n(\vec{r}_0, t) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{\nabla} F(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}$$

Il découle de l'équation de la surface du fluide

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}_0, t) = 0$$

$$\text{Donc } V_n(\vec{r}_0, t) = - \frac{1}{\left| \vec{\nabla} F(\vec{r}_0, t) \right|} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

(H.1) \implies

$$\frac{\partial F(\vec{r}_0, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}_0, t) = 0. \quad (1)$$

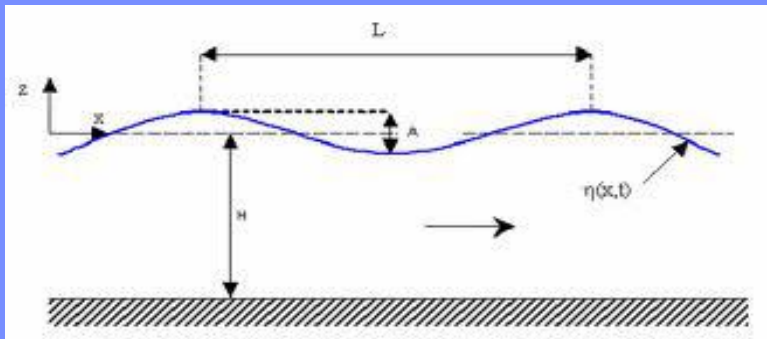
Si $\vec{v} = (u, v, w)$ et $F = \eta(x, y, t) - z$, l'équation (1) \implies

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2)$$

Condition à la limite physique

(H.2) { on néglige la tension superficielle et on suppose
la pression dans le fluide en un point très proche
de la surface est égale à la pression P_A du gaz
qui surmonte le fluide.

Formulation mathématique du problème



On se place dans le cas d'un mouvement bidimensionnel et on note par $u'(x', z', t')$, 0 , $w'(x', z', t')$, les composantes du vecteur vitesse et $z' = h' + \eta'(x', t')$ l'équation de la surface, où h' est la hauteur de fluide au repos.

Le fluide est surmonté par un gaz dont la pression P'_A est constante et uniforme dans l'espace et est soumis à la densité volumique de force $\vec{f} = \rho \vec{g}$ due à la pesanteur.

(H.3) on suppose le fluide irrotationnel

\implies

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} = 0 \quad (3)$$

Les équations de définition du problème comprennent :
Le système d'Euler :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial x'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x'} \quad (4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z'} - g \quad (5)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (6)$$

La condition à la limite au fond ($z' = 0$)

$$w'(z' = 0) = 0 \quad (7)$$

condition à la limite cinématique à la surface

$$w' = \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad \text{en } z' = h' + \eta'(x', t') \quad (8)$$

La condition à la limite physique à la surface

$$P_A - P' = 0 \quad \text{en } z' = h' + \eta'(x', t') \quad (9)$$

Les conditions initiales données à $t' = 0$

Pour éliminer des équations ci-dessus la pression du gaz qui surmonte le fluide, on utilise les solutions statique et dynamique :

solution statique ($\vec{v} = 0$)

$$(5) \implies -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z'} = 0$$

D'où la relation fondamentale de l'hydrostatique

$$P'_0 = -g\rho(z' - h') + P_A$$

On définit la pression dynamique

$$p'(x', z', t') = P'(x', z', t') - P'_0(z')$$

Les deux premières équations du système d'Euler deviennent :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial x'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (10)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z'} \quad (11)$$

et la condition à la limite physique à la surface devient

$$p' = \rho g \eta'(x', t') \quad \text{en} \quad z' = h' + \eta'(x', t') \quad (12)$$

Addimensionnement

- réduire le nombre de paramètres
- permettre des approximations correctement contrôlées

L' : longueur caractéristique (décrivant la position dans le fluide)

A' : Amplitude caractéristique (décrivant la déformation de la surface du fluide)

c'_0 : célérité caractéristique $c'_0 = \sqrt{gh'}$ (obtenue à partir des équations linéarisées)

$t'_0 = \frac{L'}{c'_0}$: temps caractéristique

On pose

$$t = \frac{t'}{t'_0}, \quad x = \frac{x'}{L'}, \quad z = \frac{z'}{L'}, \quad \eta = \frac{\eta'}{A'}$$

On définit

$$u = \frac{u'}{A'/t'_0}, \quad w = \frac{w'}{A'/t'_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho A' L' / (t'_0)^2}$$

On introduit les nombres sans dimension

$$F = \frac{g(t'_0)^2}{L'} \text{ nombre de Froude, } \epsilon = \frac{A'}{L'} \text{ et } \delta = \frac{h'}{L'}$$

En reportant dans les équations de définition de système, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$w = 0 \text{ en } z = 0 \quad (16)$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ en } z = \delta + \epsilon \eta \quad (17)$$

$$p = F\eta \text{ en } z = \delta + \epsilon \eta \quad (18)$$

En remplaçant l'expression de p donnée par (18) dans (13), on obtient une nouvelle forme de la condition à la limite de surface :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + F \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$(H.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose } \epsilon, \delta \ll 1 \text{ et indépendants} \\ \text{On suppose } \epsilon \sim \delta^2 \\ \text{On conduira les calculs jusqu'à l'ordre } \epsilon\delta \text{ ou } \delta^3. \end{array} \right.$$

Il est commode de mesurer le déplacement η de la surface en unité de δ en posant $\eta = \varphi\delta$, ce qui donne $z = \delta(1 + \epsilon\varphi)$.
L'équation (19) devient ($F\delta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Ecoulement irrotationnel \implies

$$\exists \Phi(x, z, t) : u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ et } w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

La condition (15) donne $\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$ développable en série entière ($z \sim \delta$)

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n(x, t) z^n \quad (21)$$

On obtient la relation de récurrence

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_n + (n+2)(n+1) \Phi_{n+2} = 0 \quad (22)$$

(22) + condition sur le bord inférieur $\implies \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \Phi_{2n+1}(x, t) = 0 \\ \Phi_{2n}(x, t) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \Phi_0. \end{cases}$$

Comme on fait les développements à l'ordre δ^3 et $z = \delta(1 + \epsilon\varphi)$, on se limitera à

$$u(x, z, t) = u_{surface} = f - \frac{1}{2} \delta^2 f_{xx} \quad (23)$$

$$w(x, z, t) = w_{surface} = -\delta(1 + \epsilon\varphi) f_x + \frac{1}{6} \delta^3 f_{xxx} \quad (24)$$

avec $f = f(x, t) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$.

Equation non-linéaire en eau peu profonde

En remplaçant $u_{surface}$ et $w_{surface}$ dans les conditions à la surface cinématique (17) et physique (20) en gardant les termes jusqu'à l'ordre $\epsilon\delta$ ou δ^3 on obtient le système de Boussinesq à l'ordre 1

$$(Boussinesq) \quad \begin{cases} \varphi_t + f_x + \epsilon(\varphi f)_x - \frac{1}{6}\delta^2 f_{xxx} = 0 \\ f_t + \varphi_x - \frac{1}{2}\delta^2 f_{xxt} + \epsilon f f_x = 0 \end{cases}$$

De Boussinesq à Korteweg-de Vries

On fait la dernière hypothèse :

$$(H.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{prévélogier les ondes se déplacent} \\ \text{uniquement de la gauche vers la droite} \end{array} \right.$$

\implies substituer à l'équation des cordes vibrantes l'équation de transport :

$$f_t + f_x = 0$$

On résout le système de Boussinesq par un développement perturbatif :

à l'ordre 0 en ϵ et δ , on a : $f = \varphi$

Comme on cherche un modèle d'ordre 1, on corrige de la façon suivante : on cherche des fonctions A et B de x et t telles que

$$f = \varphi + \epsilon A + \delta^2 B$$

En substituant f et φ dans le système de Boussinesq et on résout, on obtient :

$$A = -\frac{1}{4}\varphi^2 \text{ et } B = \frac{1}{3}\varphi_{xx}$$

$$\text{Donc } f = \varphi - \frac{\epsilon}{4}\varphi^2 + \frac{\delta^2}{3}\varphi_{xx}$$

En reportant l'expression de f dans la première équation du système de Boussinesq, on obtient l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

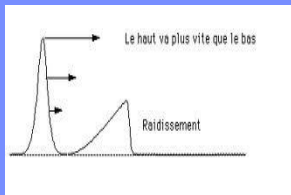
$$\varphi_t + \varphi_x + \frac{3}{2}\epsilon\varphi\varphi_x + \frac{1}{6}\delta^2\varphi_{xxx} = 0 \quad (25)$$

Si on change de repère, en posant $\psi(t, x) = \varphi(t, x + t)$ et si on fait un changement de variable convenable, on obtient l'équation de KdV à l'ordre 1

$$\psi_t + \psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0 \quad (26)$$

$$\psi_t + \psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0$$

↑ terme non linéaire
↑ terme linéaire



Lorsque le terme non linéaire l'emporte



conséquence : l'onde finit par se casser



lorsque le terme linéaire l'emporte



lorsque les deux termes s'équilibrent

En conclusion :



Le terme linéaire est dominant lorsque la profondeur est grande.

Le terme non linéaire est dominant lorsque la profondeur est petite.

On s'intéresse ici à l'équation de KdV périodique, en espace, amortie et en présence d'une force extérieure :

$$\partial_t u + \gamma u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = f. \quad (27)$$

$$u : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{T}_x \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x) \longmapsto u(t, x) \text{ périodique par rapport à } x.$$

$\gamma > 0$: le paramètre d'amortissement

f : la force extérieure, indépendante de t

J-M. Ghidaglia, *Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time*, J. Diff. Eq., 74, pp 369-390, (1988).

J-M. Ghidaglia, *A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equations*, J. Diff. Eq. **110**, 356-359, (1994).

O. Goubet, *Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems **6** (2000), no. 3, 625–644.

O. Goubet, R. Rosa *Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped KdV equation on the real line*, J. Differential Equations **185** (2002), no. 1, 25–53.

Semi-discrétisation en temps de KdV

Construction du schéma On approche la partie dissipative de (27)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_t + \gamma u = 0 \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad (28)$$

par la méthode de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\Delta t} + \gamma \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + u^n}{2} = 0 \\ u^0 = u_0. \end{cases} \quad (29)$$

$$\implies u^{n+\frac{1}{2}} = \Theta u^n = \frac{1 - \frac{\gamma\Delta t}{2}}{1 + \frac{\gamma\Delta t}{2}} u^n. \quad (30)$$

Pour l'autre partie de (27)

$$\frac{1}{2}u_t + u_{xxx} + uu_x = f \quad (31)$$

on l'approche comme suit :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \partial_x^3 \left(\frac{u^{n+1} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u^{n+1} + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 = f. \quad (32)$$

(30) + (32) \implies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{n+1} - \Theta u^n}{\Delta t} + \partial_x^3 \left(\frac{u^{n+1} + \Theta u^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u^{n+1} + \Theta u^n}{2} \right)^2 = f \\ u^0 = u_0 \\ u^n \text{ est periodique en } x \end{array} \right. \quad (33)$$

C'est un schéma d'ordre 1

$$\frac{u(t + \Delta t) - \Theta u(t)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u(t + \Delta t) + \Theta u(t)}{2} \right)^2 +$$

$$\partial_x^3 \left(\frac{u(t + \Delta t) + \Theta u(t)}{2} \right) - f = \frac{1}{4} (\partial_x u^2 - 2f) (\gamma \cdot \Delta t) + o(\Delta t^2)$$

Il est stable dans $L^2(\mathbb{T})$, uniformément en Δt .

Proposition 1

Si $\gamma\Delta t$ est assez petit, alors

$$\|u^n\|_{L^2} \leq \Theta^n \|u_0\|_{L^2} + (1 - \Theta^n) \frac{2}{\gamma} \|f\|_{L^2}. \quad (34)$$

Existence du semi-groupe discret S^n

Soit

$$E = \{u_0 \in L^2(\mathbb{T}) ; \sqrt{\Delta t} \|u_0\|_{L^2}^2 < 1\}.$$

On a

Proposition 2

Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec $4\sqrt{\Delta t} \|f\|_{L^2}^2 \leq \gamma^2$, l'équation (33) possède un semi-groupe discret S^n , $n \geq 1$, vérifiant :

$$\forall u_0 \in E, \quad u^{n+1} = Su^n = S^{n+1}u_0 \text{ est solution de (27).}$$

On écrit (33) comme

$$\frac{u^{n+1} + \Theta u^n}{2} = \Theta \mathcal{R} u^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{R} f - \frac{\Delta t}{4} \mathcal{R} \partial_x \left(\frac{u^{n+1} + \Theta u^n}{2} \right)^2 \quad (35)$$

où $\mathcal{R} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^3 \right)^{-1}$ satisfait les estimations :

Lemme 1

Il existe une constante c positive telle que :

$$(i) \quad \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{L}(L^2, H^s)} \leq \left(\frac{2}{\Delta t}\right)^{\frac{s}{3}}, \quad \forall 0 \leq s \leq 3,$$

$$(ii) \quad \|\partial_x \mathcal{R}\|_{\mathcal{L}(L^1, L^2)} \leq \frac{c}{\sqrt{\Delta t}}.$$

On applique la méthode du point fixe à

$$\mathcal{F} : w \mapsto \Theta \mathcal{R}u^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{R}f - \frac{\Delta t}{4} \mathcal{R} \partial_x (w)^2$$

sur une boule de E et on utilise le lemme 1.

Theorème 1

Le semi-groupe discret $S : E \longrightarrow E$ défini par $Su^n = u^{n+1}$ possède un attracteur global compact dans $H^3(\mathbb{T})$.

Proof : Toute solution de (33) se décompose comme suit :

$$u^n = v^n + w^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (36)$$

$$\begin{cases} \frac{v^{n+1} - \Theta v^n}{\Delta t} + \partial_x^3 \left(\frac{v^{n+1} + \Theta v^n}{2} \right) = 0 \\ v^0 = u_0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \frac{w^{n+1} - \Theta w^n}{\Delta t} + \partial_x^3 \left(\frac{w^{n+1} + \Theta w^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u^{n+1} + \Theta u^n}{2} \right)^2 = f \\ w^0 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Proposition 3

Les problèmes (37) et (38) sont bien posés et les solutions v^n et w^n satisfont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v^n\|_{L^2} = 0, \quad (39)$$

et il existe $c = c(\gamma, \|f\|_{L^2}, \|u_0\|_{L^2}) > 0$ tel que

$$\|\partial_x^3 w^n\|_{L^2} \leq \frac{c}{(\Delta t)^{\frac{3}{2}}}. \quad (40)$$

- 1 le semi-groupe S^n possède un ensemble borné absorbant (d'après la proposition 1).
- 2 le semi-groupe S^n se décompose comme somme d'une partie compacte et une partie petite.

On applique Théorème I.1.1 dans

R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Second Edition, 1997.

$\implies \exists$ attracteur global $\mathcal{A}_{\Delta t}$.

De plus, $\mathcal{A}_{\Delta t}$ est borné dans $H^3(\mathbb{T})$. Pour montrer sa compacité, on utilise un argument de J. Ball

J. Ball, *Global attractors for damped semilinear wave equations. Partial differential equations and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 10 (2004), no. 1-2, 31–52.

Proposition 4

$\mathcal{A}_{\Delta t}$ est de dimension de Hausdorff finie.

Pour tout $u \in \mathcal{A}_{\Delta t}$, on pose $v = Su$ et on note par DS la différentielle de S au point u .

La forme quadratique

$$q(\xi) = \|\xi\|_{H^1}^2 - \int \left(\frac{v + \Theta u}{2} \right) \xi^2 + \left\| \frac{v + \Theta u}{2} \right\|_{L^\infty} \|\xi\|_{L^2}^2.$$

est positive et satisfait

$$q(DS.h) \leq \Theta^2 q(h) + \Delta t \Theta^2 M \|h\|_{L^2}^2,$$

où $M = M(\gamma, \|f\|_{L^2})$

Soit Q_N la projection orthogonale :

$$Q_N H^1(\mathbb{T}) = \text{Vect}(\Phi_k)_{k \leq N}.$$

Φ_k fonction propre associée à la valeur propre λ_k de l'opérateur -Laplacien + C.L. périodiques ($\lambda_k \sim ck^2, \forall k$).
On montre que DS contracte tous les m -volumes situés à l'extérieur de $Q_N H^1$.

Pour tout $m \geq 1$ et pour toute famille orthogonale $h_1, \dots, h_m \in (I - Q_N)H^1$, on montre que :

$$\text{Gram}(DS.h_1, \dots, DS.h_m) < \text{Gram}(h_1, \dots, h_m),$$

où Q_m est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(h_1, \dots, h_m)$ et $\text{Gram}(h_1, \dots, h_m)$ est le déterminant de Gram des vecteurs h_1, \dots, h_m .

Comme

$$\text{Gram}(DS.h_1, \dots, DS.h_m) = \det(Q_m DS^t DS Q_m) \text{Gram}(h_1, \dots, h_m)$$

on montre que

$$\det(Q_m DS^t DS Q_m) < 1$$

Soit ϕ_1, \dots, ϕ_m une base orthonormale des vecteurs propres de $Q_m DS^t DS Q_m$.

$$\phi_k \in (I - Q_N)H^1 \implies \|\phi_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{N^2} \|\partial_x \phi_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{N^2}$$

$$\begin{aligned}
 \det(Q_m DS^t DSQ_m) &= \prod_{k=1}^m q(DS \phi_k) \\
 &\leq \prod_{k=1}^m (\Theta^2 q(\phi_k) + \Delta t \Theta^2 M \|\phi_k\|_{L^2}^2) \\
 &\leq \Theta^{2m} \prod_{k=1}^m (1 + \Delta t M \|\phi_k\|_{L^2}^2) \\
 &\leq \Theta^{2m} \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{c \Delta t M}{N^2}\right) \\
 &\leq \Theta^{2m} e^{m \Delta t \frac{cM}{N^2}}.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\Theta^{2m} e^{m\Delta t \frac{cM}{N^2}} \sim 1 - m\Delta t \left(2\gamma - \frac{cM}{N^2} \right)$$

si

$$2\gamma - \frac{cM}{N^2} > 0$$

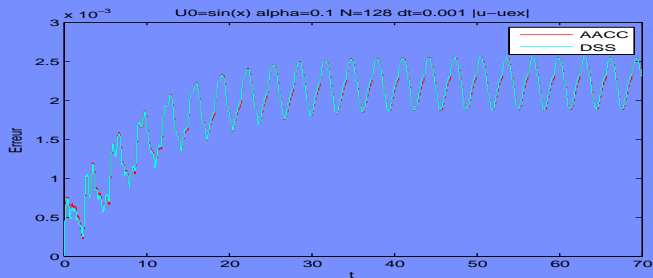
on a le résultat.

Discretisation totale de KdV

M. Abounouh, H. Al-moatassime, C. Calgareo and J.P. Chehab
A numerical scheme for the long times simulation of a forced damped KdV equation, soumis.

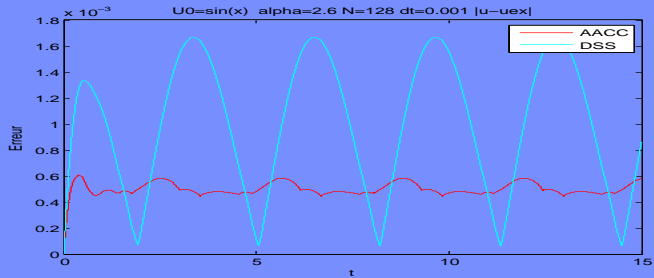
$\gamma = 0.1$ $u_0 = \sin x$ et $\Delta t = 0.001$

On représente $\|u - u_{exacte}\|_{\infty}$



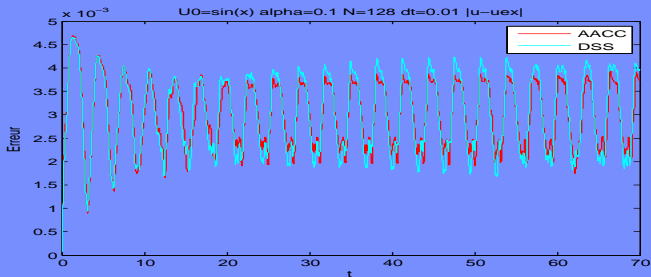
$\gamma = 2.6$ $u_0 = \sin x$ et $\Delta t = 0.001$

On représente $\|u - u_{exacte}\|_{\infty}$



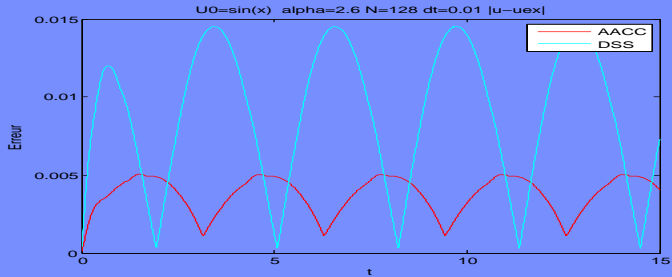
$\gamma = 0.1$ $u_0 = \sin x$ et $\Delta t = 0.01$

On représente $\|u - u_{exacte}\|_{\infty}$



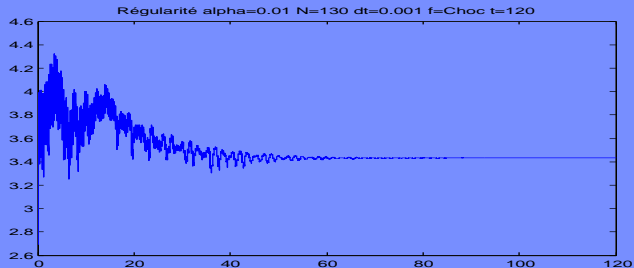
$\gamma = 2.6$ $u_0 = \sin x$ et $\Delta t = 0.01$

On représente $\|u - u_{exacte}\|_{\infty}$



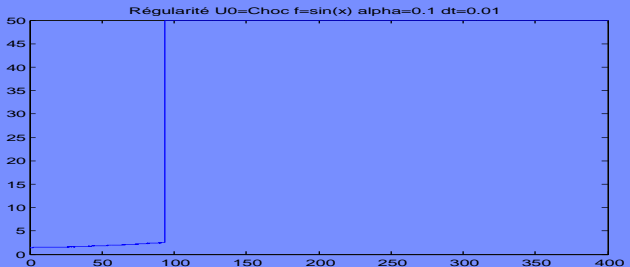
$\gamma = 0.01$ $f = \text{choc}$, $\Delta t = 0.001$ ($t=120$).

On mesure la régularité de Sobolev.



$\gamma = 0.1$ $u_0 = \text{choc}$, $f = \sin x$ et $\Delta t = 0.01$ ($t=120$)

On mesure la régularité de Sobolev.



$\gamma = 2.6$ $f = \text{choc}$ et $\Delta t = 0.001$ ($t=120$)

On mesure la régularité de Sobolev.

